ТЕМА 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Производной функции y = f(x) называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при произвольном стремлении этого приращения к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

!∇ Экономический смысл некоторых функций и их производных:

– функция спроса D = D(p)Вый товар от его цены p. Производная D′(p) дает приблизительно увеличение спроса при увеличении цены на одну единицу.

– функция предложения S = S(p) – зависимость предложения некоторого товара от его цены, S′(p) – дает приблизительно увеличение предложения товара со стороны продавцов при увеличении цены на одну единицу.

Основные правила дифференцирования

Производная *суммы* (разности) двух дифференцируемых функций равна сумме (разности) производных этих функций:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

Производная *произведения* двух дифференцируемых функций равна произведению первой функции на производную второй плюс произведение второй на производную первой, т. е.

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак производной $(cv)' = cv'\ (c = \text{const})$.

Производная *частного* двух дифференцируемых функций определяется формулой

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad при\,(v \neq 0).$$

Производная сложной функции. Если y = f(u) и u = φ(x) – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции y=f(φ(x)) существует и равна производной этой функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимой переменной, т. е.

$$y'_x = y'_u y'_x,\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Производная обратной функции. Если y = f(x) и x = φ(y) – взаимно обратные дифференцируемые функции и $y'_x \neq 0$, то

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Если функция $y = y(x)$ задана параметрически, то есть уравнениями $x = x(t),\ y = y(t)\ (\alpha < t < \beta)$, где $x(t), y(t)$ – дифференцируемые функции и $x'(t) \neq 0$, то её производная y'_x определяется формулой

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Основные формулы дифференцирования. Если $u = u(x)$ – дифференцируемая функция, то:

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$;

$(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x;$

$(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ (ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 1};$

$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha,\ \ (e^x)' = e^x;$

$(\log_{\alpha} x)' = \dfrac{1}{x \ln \alpha}, (\ln x)' = \dfrac{1}{x};$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ (\arccos x)' = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}};$

$(arctg\, x)' = \dfrac{x}{1+x^2},\ \ (arcctg\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

Пример 1. Найти производную функции $y = \sqrt{1-x^2}$.

Решение. Считая $1 - x^2 = u$ и применяя формулу (16), получаем

$$y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}, y' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Пример 2. Найти производную функции $\mathrm{y} = \sin\frac{\mathrm{x}}{3} + \cos\frac{\mathrm{x}}{6}$.

Решение. Применяя формулу (17), находим

$$y' = \cos\frac{x}{3}\left(\frac{x}{3}\right)' - \sin\frac{x}{6}\left(\frac{x}{6}\right)' = \frac{1}{3}\cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{6}\sin\frac{x}{6}.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = ctg^2 3x$.

Решение. Применяем формулу (15), находим

$$y' = -2\,ctg\,3x(ctg3x)' = -2ctg3x\frac{1}{\sin^2 3x}(3x)' = -\frac{6\,ctg\,3x}{\sin^2 3x}.$$

Пример 4. Найти производную функции $y = \dfrac{1}{tg^2 2x}$.

Решение. Так как $\mathrm{y} = \dfrac{1}{\mathrm{w}}$, $\mathrm{w} = v^2$, $v = \mathrm{tgu}$, $\mathrm{u} = 2\mathrm{x}$, то по формуле (15) получаем $y'_x = y'_w \cdot w'_v \cdot v'_u \cdot u'_x$,

$$y' = -\frac{1}{tg^4 2x} 2\,tg\,2x \frac{1}{\cos^2 2x} 2 = -\frac{4}{tg^3 2x}\frac{1}{\cos^2 2x} = -\frac{4\cos 2x}{\sin^3 2x}.$$

Пример 5. Найти производную функции $y = e^{\sin 3x}$.

Решение. Применяя формулы (15) и (18), находим

$$y' = e^{\sin 3x}(\sin 3x)' = e^{\sin 3x}\cos 3x(3x)' = 3e^{\sin 3x}\cos 3x.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = \ln(1 + x^2)$.

Решение. На основании формул (15), (19), (14) получаем

$$y' = \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Пример 7. Найти производную функцию, заданную уравнением $y\sin x = \cos(x - y)$.

Решение. Это уравнение определяет функцию $y = y(x)$ от x. Подставляя функцию $y = y(x)$ в данное уравнение, получаем тождество $y(x)\sin x \equiv \cos(x - y(x))$.

Дифференцируем это тождество и из полученного уравнения находим $y' = y'(x)$:

$$y'\sin x + y\cos x = -\sin(x-y)(1-y'),\ y'\sin x + y\cos x = -\sin(x-y) + y'\sin(x-y),$$

$$y\cos x + \sin(x-y) = y'(\sin(x-y) - \sin x),\ y' = \frac{y\cos x + \sin(x-y)}{\sin(x-y) - \sin x}.$$

Пример 8. Найти производную функцию, заданную уравнениями $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$.

Решение. Эта функция задана параметрически. Так как $x'_t = 1 - \cos t$, $y'_t = \sin t$, то по формуле (10) получаем $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$.

Пример 9. Найти производную функции $y = x^{\sin x}$.

Решение. Логарифмируя это равенство по основанию e, получаем $\ln y = \sin x \ln x$. Дифференцируя, находим $\dfrac{y'}{y} = \cos x \ln x + \sin x\left(\dfrac{1}{x}\right)$, откуда

$$y' = y\left(\cos x \ln x + \sin x\left(\frac{1}{x}\right)\right),\ y' = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \sin\frac{x}{x}\right).$$

Дифференциал функции. Если приращение функции представимо в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

где A – постоянная, $o(\Delta x)$ – бесконечно малая высшего порядка по сравнению с Δx, то слагаемое $A\Delta x$ называют дифференциалом функции f(x) в точке x_0 и обозначают dy; функцию в этом случае называют дифференцируемой в точке x_0.

Так как $dx = \Delta x$, то $dy = f'(x)dx$.

Дифференциалы и производные высших порядков. Производной n – го порядка $f^{n}(x)$ называется производная от производной (n – 1) – го порядка. Дифференциалом n – го порядка $d^{n}y$ называется дифференциал от дифференциала (n-1) – го порядка как функции x:

$$d^{n}y = d(d^{n-1}y).$$

Правило Лопиталя – Бернулли. Если функции f(x) и φ(x), дифференцируемые в окрестности точки x=a обращаются в нуль и существует предел отношения f′(x)/φ′(x) при x→a, то существует предел отношения самих функций и

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Замечание. Если f′(a) = 0, φ′(a) = 0, функции f′(x), φ′(x) дифференцируемы в окрестности точки x=a и существует предел отношения f′′(x)/φ′′(x) при x→a, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

С помощью тождественных преобразований к основному виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ можно свести неопределённости других видов, таких, как $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}.$

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

Решение. При $x=0$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть её, применяем правило Лопиталя-Бернулли:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{\frac{1}{1+x}}=2.$$

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^{x}-1)}}$.

Решение. При $x=0$ получаем неопределённость вида 0^{0}.

Обозначим $y=x^{\frac{1}{\ln(e^{x}-1)}}$ и прологарифмируем это равенство по основанию e:

$$\ln y=\frac{1}{\ln(e^{x}-1)}\ln x=\frac{\ln x}{\ln(e^{x}-1)}.$$

В правой части этого равенства при $x=0$ имеем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя дважды правило Лопиталя-Бернулли, находим

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(e^{x}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^{x}}{e^{x}-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{xe^{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}}{e^{x}+xe^{x}}=1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} \ln y = 1,\ \lim\limits_{x\to 0} y = e^1 = e,\ \lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} = e.$

Исследование функций и построение их графиков

Необходимый признак монотонности:

1) если функция f(x) в интервале возрастает, то ее производная f ′ (x) неотрицательна.
2) если функция f(x) в интервале убывает, то ее производная f ′ (x) неположительна.
3) если функция f(x) в интервале не изменяется, то ее производная f ′ (x) тождественна равна нулю.

Достаточный признак монотонности:

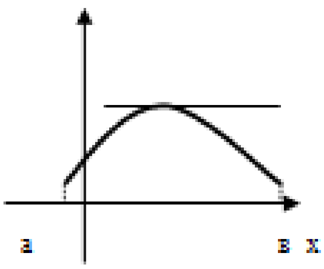
1) если производная f ′ (x) всюду в интервале положительна, то функция f(x) в этом интервале возрастает;
2) если производная f ′ (x) всюду в интервале отрицательна, то функция f(x) в этом интервале убывает.

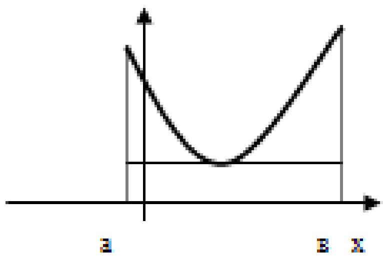
Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции f(x), если $f(x_0)$ есть наибольшее (наименьшее) значение функции f9x) в некоторой окрестности точки x_0. Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

Необходимый признак экстремума: если в точке x_0 функция f(x) достигает экстремума, то ее производная в этой точке либо равна нулю, либо не существует.

*Достаточный признак экстремума: т*очка x_0 является точкой экстремума функции f(x), если производная f ′ (x) при переходе x через x_0 меняет знак; при перемене знака “+” на “–“ точка x_0 является точкой максимума; при перемене “–“ на “+” точка x_0 является точкой минимума.

График функции называется выпуклым в данном промежутке, если он лежит ниже любой своей касательной; вогнутым, если он лежит выше любой своей касательной.





Точкой перегиба называется точка, отделяющая выпуклую дугу от вогнутой.

*Признак выпуклости и вогнутости линии: е*сли вторая производная f ″ (x) всюду в интервале отрицательна, то дуга линии y = f(x), соответствующая этому интервалу, выпуклая. Если вторая производная f ″ (x) всюду в интервале положительна, то дуга линии y = f(x), соответствующая этому интервалу, вогнутая.

Необходимый признак точки перегиба: если x_0 – абсцисса точки перегиба, то либо f ″ $(x_0) = 0$, либо f ″ (x_0) не существует.

*Достаточный признак точки перегиба: т*очка (x_0,y_0) есть точка перегиба линии y = f(x), если f ″ (x) меняет знак при переходе x через x_0.

*Асимптоты линии: п*рямая линия γ называется асимптотой линии L, если расстояние точки линии L от прямой γ стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат.

Следует различать вертикальные и наклонные асимптоты:

1) Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, то линия y = f(x) имеет асимптоту $x = x_0$.

2) Если $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0$, то линия y = f (x) имеет асимптоту y = kx + b,

где $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-kx)$.

Общее исследование функций и построение их графиков удобно выполнять по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Найти асимптоты графика функции.
3. Выяснить, не является ли функция чётной, нечетной или периодической.
4. Найти точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции.
5. Найти точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости вверх и вниз.
6. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
7. Построить график функции, используя все полученные результаты исследования. Если их окажется недостаточно, то следует найти ещё несколько точек графика функции, исходя из её уравнения.

Пример 12. Исследовать функцию и построить её график:

$$y=\frac{1}{1+2e^{-x}}.$$

!∇ В экономике его используют для определения тенденции роста производства предметов потребления.

Решение:

1. Эта функция определена на всей числовой оси.

2. Вертикальных асимптот графика функции нет. Находим наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(1+2e^{-x})}=0;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+2e^{-x}}=1.$$

Следовательно, прямая y = 1 есть горизонтальная асимптота. При $x\to-\infty$ к = 0, $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+2e^{-x}}=0$, следовательно, y = 0 асимптота при $x\to-\infty$.

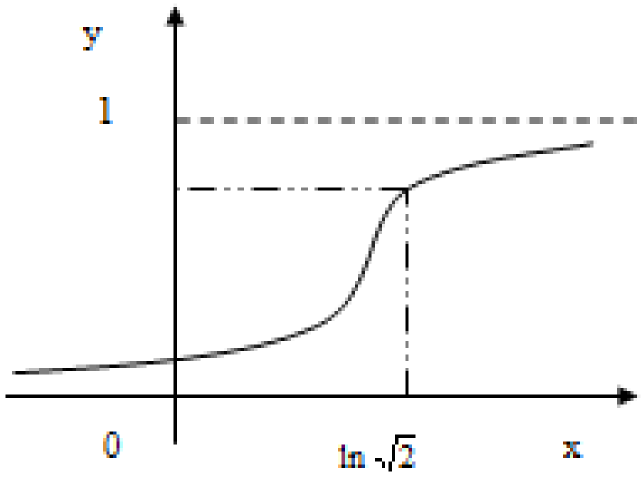
3. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

4. $y'=\dfrac{2e^{-x}}{\left(1+2e^{-x}\right)^2}$; производная в ноль ни при каких значениях x не обращается. Следовательно, экстремума нет. Функция всюду возрастает, так как производная положительна для всех x.

5. $y''=\dfrac{2e^{-x}(2e^{-x}-1)}{\left(1+2e^{-x}\right)^3}$, y'' = 0 при x = $\ln\sqrt{2}$. Точка A ($\ln\sqrt{2}$; $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$) есть точка перегиба, так как вторая производная при переходе через эту точку меняет знак.

6. График функции не пересекает ось Ox.

7. Используя все полученные данные, строим график функции .



Вопросы для самопроверки

1. Дать определение производной данной функции.
2. Что называется касательной прямой к линии в данной ее точке?
3. Каков геометрический смысл производной от данной функции $y = f(x)$ в системе декартовых координат?
4. Сформулировать правила дифференцирования результатов арифметических действий. Привести примеры.
5. В чем заключается правило дифференцирования сложной функции? Обратной функции?
6. Вывести формулы для производных всех основных элементарных функций.
7. В чем состоит прием логарифмического дифференцирования?
8. Как дифференцируют неявно заданные функции? Привести примеры.
9. В чем состоит способ параметрического задания функции и уравнений линий? Привести примеры.
10. Что называется дифференциалом функции?
11. Перечислить основные свойства дифференциала функции. В чем состоит свойство инвариантности вида дифференциала функции.
12. Привести примеры непрерывных, но не дифференцируемых функций.
13. Что называется производной n- го порядка данной функции?
14. Определить точки экстремума функции.
15. Сформулировать необходимый признак экстремума. Привести примеры, показывающие, что он не является достаточным.
16. В чем состоит достаточный признак экстремума.
17. Как отыскивается наибольшее и наименьшее значения функции на данном интервале.
18. Дать определение выпуклости и вогнутости линии $y = f(x)$ и точки перегиба.
19. Сформулировать необходимый и достаточный признаки для точек перегиба.
20. Изложить теорему Лопиталя. Привести различные примеры применения правила Лопиталя.
21. Что называется асимптотой данной линии?
22. Описать общую схему исследования функций.